線性規劃單形法表格推演流程教學程式

在數學算板中的實踐—含兩階段法及大 M 法

Teaching Tool for Simplex Method Algorithm in Mathboard - including Two-Phase and Big-M methods

林保平（Pao-Ping Lin） 前台北市立教育學院數資系退休

一、線性規劃(linear programming)簡介

簡單地說，線性規劃就是求一個線性多變數函數在某些線性條件限制之下的極大值或極小值的方法。這個線性函數稱為目標函數(object function)，函數的限制條件(constraints)就是一些線性的方程式或含等號的線性不等式，下面三個例子就是線性規劃的目標函數及限制條件的實例。

例 1、$\begin{cases} Maximize\ P = \frac{1}{2}x + 3y + z + 4w \\ x + y + z + w \le 40 \\ 2x + y - z = w \ge 10 \\ w - y \ge 10 \end{cases}$ 例 2、$\begin{cases} Minimize\ P = 0.4x + 0.5y \\ 0.3x + \frac{1}{10}y \le 2.7 \\ 0.5x + 0.5y = 6 \\ \frac{3}{5}x + 0.4y \ge 6 \end{cases}$

例 3、$\begin{cases} Maximize\ P = 3x + 2y \\ 2x + y \le 18 \\ 2x + 3y \le 42 \\ 3x + y \le 24 \end{cases}$

例 1 及例 3 要求目標函數P的極大值，例 2 要求P的極小值。x, y, z, w 就是線性規劃的變數。限制條件中的不等式可以只有一個變數，而變數空間中的所有點，我們稱為「解」(solution)。合於限制條件的變數組構成的點集合稱為可行域(feasible region) ；可行域中的元素，稱為可行解(feasible solution)；若兩個以上限制式中的等式有共同的交點，稱此點為角點解(cornerpoint solution)，角點解若為可行解，稱為可行角點解(feasible cornerpoint solution)；兩個角點解若是同在一個限制方程式上，稱此兩角點為相鄰角點解(adjacent cornerpoint solution)。可行解若為目標函數極大值(或極小值)的所在（視此線性規劃問題為求極大或求極小），稱為線性規劃的最佳解(optimum solution)，而最佳解可能不存在，也可能有無限多個。像例 3 一樣，限制式都是「≤」的不等式，我們稱之為線性規劃的標準形式。

單形法(Simplex Method)是一個常用的線性規劃方法，它使用線性規劃方法的下列 3 個特質：

（1）線性規劃若有最佳解，則必存在一個角點最佳解。

(2)若一個可行角點解的目標函數值優於或等於所有相鄰的可行解角點的目標函數值，則此可行角點解就是最佳解。

(3) 線性規劃的可行角點解的個數是有限的。

在求最佳解時，由於 (1)，我們只需測試角點是否最佳解就可以了。由於 (2) 我們若找到角點解，就可判別此角點解是否最佳解。由於 (3)，若最佳解存在的話，我們只需做有限步驟就可找到最佳解。

單形法基本上就是利用起始的可行角點解，透過聯立方程式的加減消去法，觀察比較係數，判斷問題是否無解，測試可行角點解是否為最佳解，若不是則取得鄰近較好的可行角點解，然後繼續測試，最後找出最佳可行解並求出極大或極小值。代數算板中的單形法，我們限制每一個變數都大於或等於零，且不將此條件列入限制式中，

圖 1 展示的是例 3 的相關圖形，OABCD 為可行域 (注意：本程式中 $x \geq 0, y \geq 0$ 為內定限制條件)，O, A, B, C, D, E, F, F 為角點，O, A, B, C, D 為可行角點解。$\overleftrightarrow{AB}$ 為直線 $2x + 3y = 42$，$\overleftrightarrow{BC}$ 為直線 $2x + y = 18$，$\overleftrightarrow{CD}$ 為直線 $3x + y = 24$。B 點(3, 12)為最佳解；通過 B 點的粗直線是目標函數值為極大值為 33 時的直線 $P = 3x + 2y = 33$。虛線為與目標函數直線平行的直線系 $3x + 2y = c$，c值由負值遞增至 33 (過 B 點時) 為最大。由圖形可以看出若有極大值或極小值，可行角點解是其可能位置。

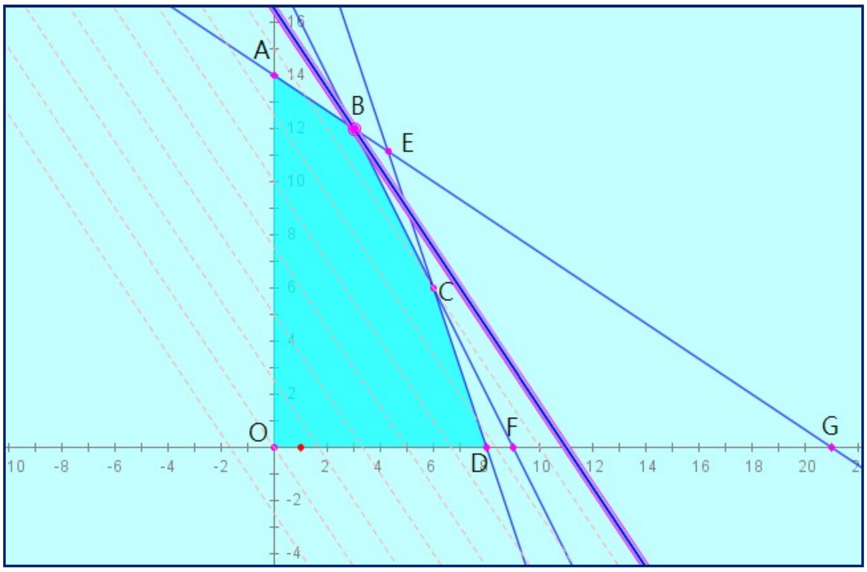


圖 1 線性規劃問題中相關資料的圖形

二、代數算板單形法解題的推演工具

單形法程式是「數學算板」中「代數算板」的一部分，處理線性規劃中求極大或極小值及最佳可行解的問題。「數學算板」計畫的研究目標是建立或幫助教師建立可直接在教室教學使用的程式(程式實例請參看

http://mathboard.org 或 http://mathboard.tw)。鑑於這個目標，本程式以指令的方式執行解題，這個程式指令集是代數算板指令集的一部份，而且數的呈現是以分數的方式而非小數，以免有無限小數出現，但輸入時可以輸入小數，這是教室教學及流程推演的要件。

在鍵入(或從程式中選取)題目之後，本指令集有兩種使用方式，一為程式自動解題，另一為使用者自行解題。程式自動解題時，程式會依序自動呈現解題指令，並執行指令且呈現指令執行結果。但是每個指令執行並呈現後，程式都會停下來，等候教師或學生提問或討論，教師認為學生理解之後，按下「Enter」才會繼續下一個解題過程。

使用者自行解題時，教師直接鍵入指令，程式會呈現每一個指令執行後的結果。教師在鍵入指令前後，可與學生討論合適的解題過程，容許不是最適合或錯誤的解題過程，也可以鍵入指令呈現提醒學生注意的內容。例如，相關的矩陣、對應解法表格的矩陣方程式、聯立方程式，或題目的原始條件式及目標函數式，以下我們分段說明代數算板單形法的解題流程及相關指令。

代數算板使用單形法表格作為解題的推演工具，以求極大值作為推演的基本模式，首先程式會將輸入的線性規劃題目之目標函數及條件式，透過加入虧盈變數(虧虛變數 slack variable 或盈餘變數 surplus variable)或人工變數(artificial variable)的方式，將其轉換成等號右邊為非負常數的聯立方程式，然後將其作成單形法表格，此表格其實就是聯立方程式的增廣矩陣加上變數名稱的表格。透過指令可以推演表格（其實就是矩陣的列運算，亦即聯立方程式的加減消去），最後可以得到線性規劃問題的解。

對於線性規劃的標準形式，我們可以使用「虧虛變數」的方式來將限制條件化為等式（注意：變數大於等於零)。圖 2 展示代數算板將例 3 題目轉換為聯立方程式，再轉換為表格之情況，表格其實就是將方程組分離係數而得。

$$\begin{cases} P = 3x + 2y \\ 2x + y \le 18 \\ 2x + 3y \le 42 \\ 3x + y \le 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P - 3x - 2y = 0 \\ 2x + y + s_1 = 18 \\ 2x + 3y + s_2 = 42 \\ 3x + y + s_3 = 24 \end{cases} \Rightarrow$$

$B.V.$	P	x	y	s_1	s_2	s_3	RHS
P	1	-3	-2	0	0	0	0
s_1	0	2	1	1	0	0	18
s_2	0	2	3	0	1	0	42
s_3	0	3	1	0	0	1	24

圖 2 由題目轉換到單形法表格的過程

圖 2 左方為線性規劃問題的題目，$P = 3x + 2y$ 為目標函數(本例求極大值）其他為限制條件式，中間為加入虧虛變數 s_i 後的聯立方程式，右方為單形法表格。

表格推演（方程式的加減消去或矩陣的列運算）時，若某行諸數中只有一個值是 1，其他值皆是 0，則該行的變數就是基變數(basic variable)。表格第零行 B.V. 顯示為基變數，圖 2 表中s_1, s_2, s_3 就是基變數，x, y 為非基變數。基變數集合的個數是不變的。第零列中，P為目標函數名稱，RHS 為 right hand side 的簡寫，其他都是變數，RHS 值均規定為大於或等於零的數。表中其他數字部分，就是聯立方程式(含目標函數方程式)的增廣矩陣。上例是求極大值的表格。求極小值時，是以求$-P=-3x-2y$ 的極大值處理的，此時數值第一列(使用指令時以[1]表示該列，第 a 列以[a]表示)中目標函數係數都要變號,此時,第一列的 RHS 的負 值,就是目標函數的值。由表格中P的係數為 1 或-1 可以看出表格是要求極大值或極小值。單形法表格中，令非基變數(表中x、y)值為零時，基變數的值為 RHS 行的值，就可得到一組可行基解(basic feasible solution)。圖 2 中$x=y=0$，$s_1=18, s_2=42, s_3=24$為起始的一組可行基解，其中$(x,y)=(0,0)$ 就是原始線性規劃問題的可行角點解。

經單形法表格推演進行過程中得到的解x,y,s_1,s_2,s_3值就是單形法的一組可行基解(其中的(x,y)就是原線性規劃的可行角點解)，單形法完成後（合於下列表格推演步驟一條件）的解，就是最佳可行解。單形法就是透過交換某一對基變數及非基變數（亦即從基變數集合中，移出某基變數，同時移入某非基變數，但維持基變數數量）得到可行基解，檢驗可行基解是否為最佳解的過程。

推演表格的方法是循環進行下列步驟:

(1)觀察可行基解及表格,確定是否已獲得最佳解 -- 若第一列(目標函數列)中的非基變數行的值均為非負,則令非基變數值為零、基變數的值為 RHS 值，就得到最佳解，程式列出最佳解及目標函數的極值後結束。求極大值時，目標函數列中的 RHS 值就是極大值，求極小值時，RHS 的負值就是極小值，上例中-3 及-2 為負值，因此其可行解並非最佳解。使用下述的大 M 法時，目標函數列中會有含 M 的項目，由於假設 M 是極大的正數，只需觀察 M 的係數即可。

(2)選擇進入基變數集合的非基變數 -- 觀察第一列(目標函數列)的變數行,選取最小負值那一行(絕對值最大的負值那一行)的非基變數，設此行為第 J 行。上例中，-3 為最小負數，因此 J=2。

(3)選擇從基變數集合中移出的基變數 -- 在前述選定的變數行中,觀察除了目標函數列外的每一「非負數」列的值(設為 t),選取 RHS/t 中最小值的列，該列的基變數就是要從基變數集合中移出的 變數,設此列為 I。上例 18/2=9、42/2=21、24/3=8 中，8 最小，故 I=4。若觀察的每一列都是負數，表示可行域無界，程式宣告本問題無最佳可行解後結束。

(4)取得次一個可行基解--使用矩陣的列運算，將第 J 行第 I 列的數值化為 1,第 J 行的其他列化為 0，這就是轉軸運算(pivoting)。上例作轉軸運算後可得到下圖之表格，

B.V.	P	x	y	s_1	s_2	s_3	RHS
P	1	0	-1	0	0	1	24
s_1	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	2
s_2	0	0	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	26
x	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	8

可看出x, s_1, s_2為基變數，令非基變數為 0(亦即令$y = s_3 = 0$)。此時，$x = 8, y = 0, s_1 = 2, s_2 = 26, s_3 = 0$為一個可行基解(其中$(x, y) = (8,0)$ 為原線性規劃問題的可行角點解)，完成後回到(1)。例 3 的完整推演過程請看附錄 1。

三、兩階段法與 Big-M 法

若所解極值問題的條件式不是標準形式，亦即限制式含有等式或限制式含有「≥」的不等號時，將條件式轉換為聯立方程式需要加入「盈餘變數」或「人工變數」。此時，有兩種處理方法可供使用者選擇：兩階段法(two-phase method)或大 M(Big-M)法。

(1)兩階段法 -- 下圖為兩階段法轉換的表列式(本例為求極小值)

$$\begin{cases} P = 4x + y \\ 3x + y = 3 \\ 4x + 3y \geq 6 \\ x + 2y \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -W + a_1 + a_2 = 0 \\ -P + 4x + y = 0 \\ 3x + y + a_1 = 3 \\ 4x + 3y - s_1 + a_2 = 6 \\ x + 2y + s_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

B.V.	W	P	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
W	-1	0	0	0	0	0	1	1	0
P	0	-1	4	1	0	0	0	0	0
a_1	0	0	3	1	0	0	1	0	3
a_2	0	0	4	3	-1	0	0	1	6
s_2	0	0	1	2	0	1	0	0	4

圖中左方為目標函數及條件式，中間為轉換後的聯立方程式，右邊為第一階段列出的表格，其中s_i為盈餘變數，a_i為人工變數。人工變數a_i的加入是因為要讓原點仍然是原條件式的解，因此本階段加入$W = a_1 + a_2$將其看作目標函數，並設法將 W 中的a_1, a_2化為零，亦即要求出W的極小值，故考慮$-W$的極大值，亦即考慮$-W + a_1 + a_2 = 0$, 因此表格中W係數是-1，又本題為求極小值問題，因此P係數為-1。故第一階段要先將W列的a_1, a_2係數化為零，亦即用列運算將a_1, a_2 改為基變數，然後依前述單形法推演的法則(1)至(4)作推演，將x, y 取代a_1, a_2為基變數（詳細推演參閱附錄 2），使W有極小值以取得原題的一組可行解。這個推演與前述流程相同，只不過此時第一列(W列)是目標函數列。下圖呈現第一階段推演的結果表格及第二階段開始的表格。

B.V.	W	P	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
W	-1	0	0	0	0	0	1	1	0
P	0	-1	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{18}{5}$
x	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
y	0	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
s_2	0	0	0	0	1	1	1	-1	1

第二階段開始

B.V.	P	x	y	s_1	s_2	RHS
P	-1	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{18}{5}$
x	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
y	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
s_2	0	0	0	1	1	1

由圖中左表可以看出x, y, s_2 為基變數，$a_1 = 0$、$a_2 = 0$、$x = \frac{3}{5}$、$y = \frac{6}{5}$、$s_1 = 0$、$s_2 = 1$為原題目的一組可行解，刪除不需要的第一行、第一列及a_1, a_2行，得到上圖右方第二階段的單行法表格。再進行第二階段的單行法表格推演，就可以求出最佳解（本例在第二階段不必處理就可得到答案）。程式會自動偵測何時應該進入第二階段，並呈現第二階段的表格。

(2)Big-M 法 -- 下圖為 Big-M 法的表格

$$\begin{cases} P = 4x + y \\ 3x + y = 3 \\ 4x + 3y \geq 6 \\ x + 2y \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -P + 4x + y + (M)a_1 + (M)a_2 = 0 \\ 3x + y + a_1 = 3 \\ 4x + 3y - s_1 + a_2 = 6 \\ x + 2y + s_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$B.V.$	P	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
P	-1	4	1	0	0	M	M	0
y	0	3	1	0	0	1	0	3
a_2	0	4	3	-1	0	0	1	6
s_2	0	1	2	0	1	0	0	4

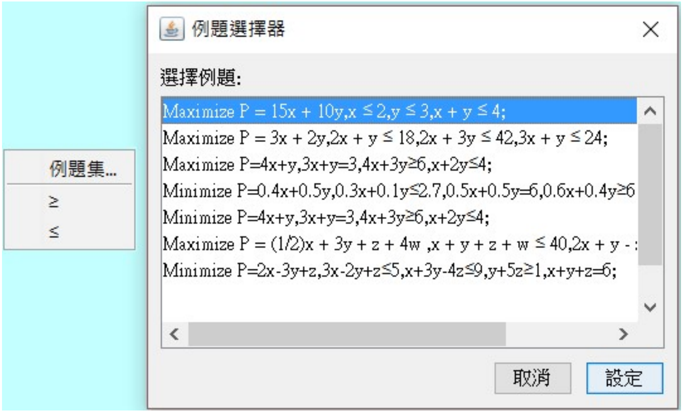
由上圖中，我們將目標函數改為P＝$4x + y + Ma_1 + Ma_2$，M代表一個很大的正數。求P的極小值, 就是求$-P = -4x - y - Ma_1 - Ma_2$ 的極大值，同樣的我們需利用列運算將P列的M化為零，亦即先將a_1, a_2 化為基變數，然後依前述單形法推演(1)至(4)的流程取得當$a_1 = 0, a_2 = 0$時的可行基解即可（詳細推演請看附錄 3）。本程式在呈現時，只有在目標函數列能呈現含M的一次式，使用者自行解題時要注意，除第一列外，其他位置的運算結果不得含有M。

兩種方法中，目標函數列的人工變數係數都需用列運算先化為零，使其成為基變數，然後再用單形法推演法則，將人工變數的基變數取代，最後求出可行基解。

有關單形法表格的呈現與推演，兩階段法及大 M 法，可參閱 http://www.sce.carleton.ca/faculty/chinneck/po.html 第 4 章及第 5 章。

四、輸入題目之指令 - Maximize 及 Minimize

本程式畫面可以輸入解題指令，輸入前一定要輸入「$」記號(程式通常會自動提供)，最後面一定要加入「;」表示結束輸入，當「游標」在分號後面時，按「Enter」鍵即可執行輸入的指令。輸入題目時, 可以按滑鼠右鍵選取例題集，從其中選取題目，如下圖



或以下列範例的格式自行輸入。

Maximize P = (1/2)x + 3y + z + 4w , x + y + z + w ≤ 40, 2x + y − z − w≥ 10 , w − y ≥ 10;

Minimize P = 0.4x+0.5y, 0.3x+0.1y≤2.7, 0.5x+0.5y=6, 0.6x+0.4y≥6;

Minimize P=2x−3y+z, 3x−2y+z≤5, x+3y−4z≤9, y+5z≥1, x+y+z=6;

其中「Maximize」及「Minimize」為指令，其後第一個跟隨的是目標函數 P，之後就是條件式(等式或含等號的不等式)，以「,」號分隔。所有變數都內定為大於或等於零，這個條件不列在條件式中。「Maximize」可以簡寫為「Max」，「Minimize」可以簡寫為「Min」。

當游標在「;」號後面時，按「Enter」，程式會呈現整理後的題目，它是以大括號的形式，依次列出目標函數式及條件式，輸入的所有小數或分數均以約分後的分數形式呈現，如下圖。

$Minimize p=0.4x+0.5y, 0.3x+0.1y≤2.7, 0.5x+0.5y=6, 0.6x+0.4y≥6;

$$\begin{cases} p=\frac{2}{5}x+\frac{1}{2}y \\ \frac{3}{10}x+\frac{1}{10}y\le\frac{27}{10} \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=6 \\ \frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y\ge 6 \end{cases}$$

注意:

(1)自行輸入時，不等號 ≥ 和 ≤ 的輸入，可在游標位置，按滑鼠右鍵選取，或輸入「>=」及「<=」，中間不得有空格，也可以試試「ctrl + shift + >」或「ctrl + shift + <」。

(2)變數只能是一個英文字母，目標函數名稱在程式執行時都會用「P」代替，其他的變數，必須是目標函數名稱字母之後的字母，例如範例中 w、x、y、z

均為 P 之後的字母，請注意 W、P、a、s 為程式內定使用的變數，請勿使用以免混淆。

(3)本程式特別使用內建的符號運算程序,可以處理分數係數(這是呈現及討論單形法流程時，十分重要的)，因此變數的係數可以是整數、分數或小數，程式會自動將小數化為分數。

五、自動解題

輸入題目按「Enter」時，若同時按「Shift」鍵，程式就會進行自動解題。程式會依照單形法解題流程，自動呈現每一步驟的解題指令並執行，然後等候使用者按下「Enter」進行下一步驟。若需要使用兩階段法或大 M 法時，程式會出 現對話框，讓使用者選擇使用哪一個方法。輸入題目後的第一個步驟就是使用下述的列表指令（Tableau）。

六、教師或學生解題

輸入題目後，按「Enter」程式呈現條件式後，使用者須斟酌情況自行輸入指令，進行解題。

有下列指令可以使用:

(1) Tableau -- 這應該是第一個輸入的指令，程式會利用虧盈變數或人工變數將線性規劃的條件式化為線性方程組（都是等式），但不呈現方程組，並將方程組以單形法表格的方式呈現，以便利用矩陣列運算求得最佳可行解。輸入此指令之後，在解題完成前若再次輸入，程式會再次呈現目前推演中的表格。若需使用兩階段法或 Big-M 法時，程式會呈現對話框，讓使用者做出選擇。選擇後，程式會呈現兩階段法或 Big-M 法的表格。

Big-M 法可處理含變數 M 的列運算(注意:含 M 的數不能做除數)，由於程式中只有 P 列(Big-M 法表格的第一列)能呈現含 M 的式子(且限定為 M 的一次式或常數)，因此手動操作做列運算時要注意，不可將含 M 的一次式乘到非 P 列，在 P 列中含 M 時也不可將 P 列乘上含 M 的式子。但可將其他非 P 列乘上含 M 的一次式直接加到 P 列(亦即要使用含 M 的列運算必須合於 Big-M 法運算程序)。

(2) MaForm -- 這個指令呈現表格推演中，目前表格的矩陣方程式，如下圖為二階段法表格相對應的矩陣方程式及其增廣矩陣。這個指令讓使用者可以隨時對照,單形法表格與矩陣方程式。

$MaForm;

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ p \\ x \\ y \\ s_1 \\ s_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{27}{10} \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{簡寫為增廣矩陣==>} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{27}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(3) EqForm -- 這個指令呈現目前表格的方程組表示式，前者為兩階段法，後者為 Big-M 法。這個指令的目的是讓使用者可以隨時對照單形法表格與聯立方程式。

$EqForm;

$$\begin{cases} -W+a_1+a_2=0 \\ -p+\frac{2}{5}x+\frac{1}{2}y=0 \\ \frac{3}{10}x+\frac{1}{10}y+s_1=\frac{27}{10} \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+a_1=6 \\ \frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y-s_2+a_2=6 \end{cases}$$

$EqForm;

$$\begin{cases} -p+\frac{2}{5}x+\frac{1}{2}y+(M)a_1+(M)a_2=0 \\ \frac{3}{10}x+\frac{1}{10}y+s_1=\frac{27}{10} \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+a_1=6 \\ \frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y-s_2+a_2=6 \end{cases}$$

(4) Ma -- 這個指令呈現目前表格的矩陣，亦即單形法目前表格相對應的增廣矩陣。

(5) Cond -- 這個指令呈現目前進行的線性規劃問題的原始目標函數及條件式(就是鍵入題目執行後呈現的式子)，教師可隨時呈現提醒學生。

(6) 矩陣的列運算指令 -- 矩陣（或相對應的表格）的列運算方法，是單形法的基本運算，通常以[x]表示第 x 列，x 為正整數。可使用兩種指令

A[x]將 A 乘以第 x 列

A[x]+[y]表示將第 x 列乘以 A 加到第 y 列

其中 A 為整數或分數(在兩階段法時可以是含 M 的一次式),x、y 均為正整數。本指令解題時，可以鍵入下述[x,y]指令直接將第 x 列第 y 行化為 1 ，第 y 行的其他列化為 0。使用正確列運算作方程組的化簡雖均為合法，但未必合於單形法的解題流程，教師教學時可與學生討論。本指令可讓教師指導學生了解下述「轉軸」運算的意義。

(7) 矩陣的轉軸（pivoting）運算指令[x,y]-- 依序使用列運算，將第 x 列第 y 行化為 1，第 y 行的其他列化為 0。本指令為好幾個列運算綜合為一個的運算指令。從解方程式的觀點來看，轉軸運算其實就是選定一個變數，再選定一個方程式,將方程式中的該變數係數化為 1(方便觀察該變數的值)，並加

減消去其他方程式中的該變數。下圖為列運算及轉軸運算的指令，其中含 M 的列運算只能用在 Big-M 法。

```
$-[4]+[1];    $-M[3]+[1];    $[3,3];
```

七、結語

為方便教師線性規劃單形法流程的課堂教學，本文簡單介紹單形法及代數算板中單形法表格流程的推演程序及方法，包含兩階段法及大 M 法。代數算板以分數的輸出為主，可以輸入小數及分數，表格內的數是以標準分數的型態出現。程式的使用有兩種方式：自行輸入指令或程式自動解題。教師可自行輸入題目或選擇內建的題目，不論自動輸入指令或程式自動解題，教師都可在教學過程中，詳細地與學生討論解題過程與步驟，教師對於推演的原理討論，應做適當的規劃進行，希望數學算板中的本程式有助於線性規劃單形法流程的教學。

附錄 1 標準型式的表格推演流程

$Maximize P = 3x + 2y, 2x + y ≤ 18, 2x + 3y ≤ 42, 3x + y ≤ 24;

$$\begin{cases} P=3x+2y \\ 2x+y\le 18 \\ 2x+3y\le 42 \\ 3x+y\le 24 \end{cases}$$

$Tableau;

B.V.	P	x	y	s_1	s_2	s_3	RHS
P	1	-3	-2	0	0	0	0
s_1	0	2	1	1	0	0	18
s_2	0	2	3	0	1	0	42
s_3	0	3	1	0	0	1	24

$[4,2];

B.V.	P	x	y	s_1	s_2	s_3	RHS
P	1	0	-1	0	0	1	24
s_1	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	2
s_2	0	0	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	26
x	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	8

$[2,3];

B.V.	P	x	y	s_1	s_2	s_3	RHS
P	1	0	0	3	0	-1	30
y	0	0	1	3	0	-2	6
s_2	0	0	0	-7	1	4	12
x	0	1	0	-1	0	1	6

$[3,6];

B.V.	P	x	y	s_1	s_2	s_3	RHS
P	1	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	33
y	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	12
s_3	0	0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	3
x	0	1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	3

$x=3, y=12, P=33$

附錄2 兩階段法表格推演流程

$Maximize p=4x+y, 3x+y=3, 4x+3y≥6, x+2y≤4;

$$\begin{cases} p=4x+y \\ 3x+y=3 \\ 4x+3y\ge 6 \\ x+2y\le 4 \end{cases}$$

$Tableau;

第一階段開始

B.V.	W	p	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
W	-1	0	0	0	0	0	1	1	0
p	0	1	-4	-1	0	0	0	0	0
?	0	0	3	1	0	0	1	0	3
?	0	0	4	3	-1	0	0	1	6
s_2	0	0	1	2	0	1	0	0	4

$-[3]+[1];

B.V.	W	p	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
W	-1	0	-3	-1	0	0	0	1	-3
p	0	1	-4	-1	0	0	0	0	0
a_1	0	0	3	1	0	0	1	0	3
?	0	0	4	3	-1	0	0	1	6
s_2	0	0	1	2	0	1	0	0	4

$-[4]+[1];

B.V.	W	p	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
W	-1	0	-7	-4	1	0	0	0	-9
p	0	1	-4	-1	0	0	0	0	0
a_1	0	0	3	1	0	0	1	0	3
a_2	0	0	4	3	-1	0	0	1	6
s_2	0	0	1	2	0	1	0	0	4

$[3,3];

B.V.	W	p	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
W	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$	1	0	$\frac{7}{3}$	0	-2
p	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	0	4
x	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1
a_2	0	0	0	$\frac{5}{3}$	-1	0	$-\frac{4}{3}$	1	2
s_2	0	0	0	$\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	3

$[4,4];

B.V.	W	p	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
W	-1	0	0	0	0	0	1	1	0
p	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{18}{5}$
x	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
y	0	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
s_2	0	0	0	0	1	1	1	-1	1

第二階段開始

B.V.	p	x	y	s_1	s_2	RHS
p	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{18}{5}$
x	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
y	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
s_2	0	0	0	1	1	1

$x=\frac{3}{5}, y=\frac{6}{5}, p=\frac{18}{5}$

附錄3 大M法表格推演流程

$Maximize p=4x+y, 3x+y=3, 4x+3y≥6, x+2y≤4;

$$\begin{cases} p=4x+y \\ 3x+y=3 \\ 4x+3y\ge 6 \\ x+2y\le 4 \end{cases}$$

$Tableau;

B.V.	p	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
p	1	-4	-1	0	0	M	M	0
?	0	3	1	0	0	1	0	3
?	0	4	3	-1	0	0	1	6
s_2	0	1	2	0	1	0	0	4

$-M[2]+[1];

B.V.	p	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
p	1	$-3M-4$	$-M-1$	0	0	0	M	$-3M$
a_1	0	3	1	0	0	1	0	3
?	0	4	3	-1	0	0	1	6
s_2	0	1	2	0	1	0	0	4

$-M[3]+[1];

B.V.	p	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
p	1	$-7M-4$	$-4M-1$	M	0	0	0	$-9M$
a_1	0	3	1	0	0	1	0	3
a_2	0	4	3	-1	0	0	1	6
s_2	0	1	2	0	1	0	0	4

$[2,2];

B.V.	p	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
p	1	0	$-\frac{5}{3}M+\frac{1}{3}$	M	0	$\frac{7}{3}M+\frac{4}{3}$	0	$-2M+4$
x	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1
a_2	0	0	$\frac{5}{3}$	-1	0	$-\frac{4}{3}$	1	2
s_2	0	0	$\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	3

$[3,3];

B.V.	p	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
p	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$M+\frac{8}{5}$	$M-\frac{1}{5}$	$\frac{18}{5}$
x	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
y	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
s_2	0	0	0	1	1	1	-1	1

$x=\frac{3}{5}, y=\frac{6}{5}, p=\frac{18}{5}$