

動態數學軟體簡介

台北市立教育大學 數資系 林保平

幾何是研究空間的數學，這是數學與實際世界關連最密切的部份。一般認為學習幾何有兩個目標，一為發展邏輯思考能力；一為發展實際世界的空間直覺。九年一貫課程暫行綱要認為幾何教學應透過察覺、辨識、操作、實驗，來發現形體的組成要素及其與形體之間的關係，進而能確立空間的基本概念，掌握空間的基本性質。幾何課程在國中小教學時，觀察及臆測等活動常常受到實物或材料的限制，例如，經由「任意平行四邊形可切割拼補成長方形」而導出「底 \times 高」面積公式的活動，在實際教學時，只能提供若干切割好的圖片給學生組合觀察，對「任意」無法有效顯示，切割方式亦無法做多種變化，以達成學生「觀察歸納」的教學目標；又如討論角概念時，通常教材會包含旋轉（只有一邊）及張開程度（兩邊）兩種動態觀點，但若使用圖片則動態的過程不易顯示清楚，若使用實物，則旋轉或張開的過程無法完全重複（第二次就不會與第一次相同）以便比較。類似的限制往往使課程安排的觀察、比較、臆測、發現或建構的學生活動目標不易達成，教師運用觀察歸納的方式教學的意願，也常因此而顯得低落。

「動態數學」的教學觀念，開始於「動態幾何」，自 Geometry Supposer (Schwartz, 1985) 軟體首先發展，到 Cabri Geometry (Baulac et al, 1988), Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1992), Cabri II Geometry (Baulac et al, 1994), Euklid (Mechling, 1994)、java Sketchpad (1997), MathBoard (Lin, 數學算板 2011) 以來，版本屢有更新，其功能也日益精進，不止提供了基本幾何作圖及度量工具，具有尺規作圖、圖形可變異或動態連續變換、保持結構、特殊即一般、記錄作圖過程、直接建立上網檔案(如 Cabri、Sketchpad、MathBoard)等特質，有些軟體，更包含代數內容具有直角坐標系、極坐標系，提供了繪製函數圖形、導函數圖形之功能，且其圖形仍具動態、可操作之特性，這些功能及特質，不只提供畫出精確圖形之功能，而且能協助教師

根據單元建立方便操作、易於探討圖形性質的教學及學習環境。數學算板除了有幾何畫板模組外，另有代數算板、龜行幾何、統計機率、含參數之一元函數圖形製作等模組，其中代數算板更提供代數相關的簡單符號運算（數以分數形式呈現）的教學程序。

「動態」相對於「靜態」，意味著可操作及互動性。動態數學軟體提供學生或教師互動、可操作、動態連續的數學學習環境，供使用者及學生探索及學習數學。動態數學軟體通常具備了下列特質：

(1) 尺規或函數作圖

市面上的繪圖軟體很多，而且也提供了非常方便並友善的使用者介面，但其目標是美術繪圖或設計製圖，並未考慮幾何教學的需要，畫一個在幾何課本上出現的幾何圖形不太容易，而且畫出圖形之後，圖形就固定了，無法方便地操作及變異圖形，動態幾何軟體基本上是尺規作圖，且所作的圖形是可操作及可變異的。所有用直尺及圓規能作出的幾何圖形，都能利用它們所提供的作圖工具，仿照直尺或圓規的作圖方法，相當容易地製作出精確的幾何圖形，例如畫點、直線、線段、射線、圓、弧、平行線、垂直線、角平分線…，取出線與線、線與圓、或圓與圓的交點，選取直線形、圓或弧的內部，並能利用這些基本功能的組合，製作較複雜的幾何圖形。由於這些作圖工具均依照幾何的定義而設計，因此圖形精確適合幾何教學。所得的圖形整體或其構成部份，均可在螢幕上，利用滑鼠直接依作圖時的定義，移動其位置或改變形狀，或利用軟體提供的幾何變換 (Geometric Transformation) 功能，選出變換的基準（例如平移向量、鏡射軸、旋轉或相似中心、放縮的比例、旋轉的角度…等）之後，作平移、旋轉、鏡射、相似等變換。這種幾何作圖及圖形可操作及變異的功能，是動態幾何軟體能成為臆測、探索幾何性質工具的基本原因。

(二) 圖形的可變異性 — 動態連續變化

當圖形或其某一構成元素改變位置、形狀或被變換時，其改變的過程是漸進及連續的。不只圖形的最終狀態呈現出來，其位置改變過程中的圖形，也連續呈現出來。使用者看到的是一個連續的變動過程。這類軟體使得學生能觀察圖形的連續變換，並由度量工具（量角度、長度、面積、周長、弧長…，顯示點的座標，直線的斜率…）之輔助來發現幾何的不變性質（invariant）。利用這種連續呈現變換過程的特質以及變換的直觀特性，國小學生也可以學習更多的幾何性質。例如，勾股定理的面積關係，就可以經由平移及等積變換（平移及旋轉，或運用切割及拼圖遊戲，或度量面積），相當直觀地在電腦螢幕上讓學生操作，或由電腦自動呈現。

(三) 特殊即一般（保持結構）

通常我們因證明需要而畫一個幾何圖形時，我們畫的是一個「特殊」的圖形，但證明過程中一直將它想成「一般」的圖形，證完之後，我們也認定所證明的是具有相同「已知」的任意圖形所擁有的性質。許多學生習於這種特殊圖形，對於證明過程中，圖形所代表的「一般化」性質並不了解（Balacheff, 1988），若將圖形改變形狀之後，可能就認為它們是不同的問題。Williams(1979) 發現 20% 的學生不明瞭演繹證明的結論係對所有符合「已知」的幾何圖形均成立的，並且只有 31% 的學生了解這個證明的一般化原則，Fischbein(1982) 也曾描述相似的結果，只有 24.5% 的學生認為證明過後，對其他特例不必重新檢驗。在動態數學軟體下所作的圖形，使用者可任意移動圖形的構成元素，而圖形因其構成元素改變相對位置而改變形狀以後，其構成元素間的「幾何結構或代數關係」保持不變，因此，所得到的是「一般化」的任意圖形（能保持某種固定特質的多

種圖形)。例如，若三角形是由三個「自由點」構成，則使用者可移動任一頂點，使此三角形變成等腰 \triangle ，正 \triangle ，直角 \triangle ……等，甚至「三點共線」也可看成三角形的一個特例。若利用這個三角形作出三角形的三中線，便可看到三中線交於一點，當改變三角形的形狀時，這三中線仍然維持具有「相交於一點」的這個幾何特質。在畫三角形時，亦可控制其構成元素，使它變成一個一般化的直角三角形、等腰三角形……等。這種能保持某類圖形「特徵性質」的「一般化」幾何圖形，不只能幫助學生了解具有這種『特徵性質』的圖形在證明過程的『代表性』，也是教學時，十分有用能提供學生觀察、比較、臆測、驗證幾何圖形性質的重要工具。

(4) 記錄作圖過程

較強的動態幾何軟體，通常具有記錄操作或作圖過程的功能，當使用者從畫出三點、畫三角形到畫出三邊的垂直平分線，到發現三條垂直平分線交於一點，要經歷一些作圖的過程，這些作圖的過程均可記錄下來，記錄的結果程式，可以當作下次作圖的工具。選出工具，訂出基本元素，就可由軟體作圖，省去重新作圖的過程，所做的圖形與原來的圖一樣，是一個一般化的圖形，上例就可作為畫出三角形外心的工具，同樣的，使用者也可以建立畫內心、垂心、重心……的工具，這些基本工具，又可組合成更複雜的工具，例如，由外心、垂心及重心等工具可構成畫尤拉線的工具，以檢驗這三點是否共線。這使作圖的工程簡化許多，做過一次，以後就可以重複利用。這種記錄作圖過程的功能，在協助教師了解學生解題的思考過程上有很大的助益，教師可以在事後分析學生解題及作圖的思考過程，以利補助教學的進行。

(五) 將內容儲存成瀏覽器可執行的html 檔案

Cabri 3.0、Geometer's Sketchpad 4.0 以上的版本及 MathBoard 的幾

何畫板模組，都提供獨立的網路執行模組程式，且可將設計或畫出的圖形儲存成html檔案，將模組程式及html檔案置於網頁上，上網的人都可以在網路上操作或觀察使用設計者設計的程式內容（注意：不能在網路上使用動態幾何軟體作任何設計，但可操作或探討設計者設計出來的內容），教師可設計問題置於網站上供學生操作並思考問題、解決問題。

動態數學程式環境除了可以供學生學習數學、探索數學之外，教師也可以利用其所提供的強大功能設計針對單元的動態的教具學具程式，再由教師使用或在教師指導下學生使用，幫助學生學習數學，在此情況下，學生不必學習軟體的各種功能，執行程式後，由教師操作提問來討論問題，或由教師指導學生操作並探索問題。有興趣的讀者，上網 <http://www.dynamath.tw> 可直接在網路上操作使用設計好的教具學具檔案程式；教師若對 Geometer's sketecpad 程式有興趣，可上網 <http://www.keypress.com/sketchpad/sketchdemo.html> 下載測試版。最近發佈的 MathBoard 程式，更將前述網頁的大部分程式，轉化成 MathBoard 網路可執行的程式，放置於 <http://www.mathboard.org>，MathBoard 測試版也可以在該網頁取得，網頁 <http://www.dynamath.tw> 及 <http://www.mathboard.org> 都是動態數學工作室本文作者的作品。

聯絡位址：plin@tmue.edu.tw or plin@dynamath.tw

參考資料

Baulac, Y., Bellemain, F. & Laborde (1988). *Cabri: The Interactive Geometry notebook*. Ca: Brook/Cole Publishing Company.

- Jackiw, N. (1992). *Geometer's Sketchpad* (computer program). Berkeley, CA: Key Curriculum Press.
- Jackiw, N. (1997). Java Sketchpad. (computer programs for web).
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics, in D,Pimm(ed.). *Mathematics Teachers and Children*. Hodder and Stoughton., London, pp.216-238.
- Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics* 3(2), 9-18, 24.
- Mechling, R. (1994). Euklid. Computer Software.
- Schwartz, J. T. (1985). The Geometric Supposer : Using Microcomputers to Restore Invention to the Learning of Mathematics. In Wirszup, I. & Screit, R. (eds.) *Developments in School Mathematics Education around the World*. VA Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Usiskin, Z. P. (1982). Van hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry (Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project). Chicago, IL: University of Chicago, Department of Education.
- Williams, E. (1979). *An Investigation of Senior High School Students' Understanding of the Nature of Mathematical Proof*. Unpublished doctoral Dissertation. University of Alberta. Edmonton, Canada.